Chapitre 15. Convexité

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non trivial.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1.

* Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0,1]$

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

* Elle est dite concave si $\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0,1]$

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

1.2 Opérations

Proposition 1.2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$

* Si f et g sont convexes (resp. concaves), alors $f + g$ aussi.
* Si f et g sont convexes, $\max(f, g)$ est convexe.
* Si f et g sont concaves, $\min(f, g)$ est concave.
* L'opposé d'une fonction convexe est concave et réciproquement.

1.3 Inégalité de Jensen

Définition 1.3. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Une combinaison convexe de $x_1, \dots, x_n$ est un nombre de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ où $\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+ \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \end{cases}$

On parle aussi de barycentre des $a_1, \dots, a_n$ (et dans le cas $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ on parle d'isobarycentre).

Théorème 1.4 (Inégalité de Jensen / de convexité)**.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

1.4 Position de sécantes

Proposition 1.5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $a < b \in I$. Alors :

* Sur $I \cap]-\infty, a]$ le graphe de f est au-dessus (au sens large) de la droite reliant $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$
* Sur $I \cap [b, +\infty[$ idem.
* Sur $[a, b]$ le graphe est en-dessous de la droite.

1.5 Pentes

Proposition 1.6 (Inégalité de trois pentes). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $s < t < u \in I$
Alors
$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

Remarque : Chacune des trois inégalités contenues dans le théorème est équivalent à deux autres et au faut que $\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ est sous la courbe joignant $\begin{pmatrix} s \\ f(s) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ f(u) \end{pmatrix}$
Les trois inégalités équivalent à

$$(u-s)f(t) \leq (u-t)f(s) + (t-s)f(u)$$

ou encore
$$f(t) \leq \underbrace{\frac{u-t}{u-s}}_{1-\lambda} f(s) + \underbrace{\frac{t-s}{u-s}}_{\lambda} f(u)$$

avec λ tel que $t = (1-\lambda)s + \lambda u$

Proposition 1.7. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction taux d'accroissement
$$\tau_{[f,a]} \begin{cases} I \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$
est croissante.

2 Convexité et régularité

2.1 Régularité automatique

Proposition 2.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $a \in I$ intérieur.
Alors f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$

Théorème 2.2. Une fonction convexe est continue en tout point intérieur de son intervalle de définition.

Corollaire 2.3. Si I est un intervalle ouvert, toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ convexe est continue.

2.2 Caractérisation des fonctions convexes (deux fois) dérivables

Théorème 2.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Alors f est convexe ssi f' croît.

Corollaire 2.5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
Alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$

Corollaire 2.6. Soit $f \in D^1(I)$ convexe et $a < b \in I$
On a
$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$$

2.3 Applications

Le critère de convexité pour les fonctions deux fois dérivables montre directement que :

$*$ exp est convexe.

$*$ ln est concave.

$*$ sin est concave sur $[0, -\pi]$

Proposition 2.7 (Inégalité arithmético-géométrique générale)**.** Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ de somme 1 et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$
Alors

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

2.4 Position par rapport à la tangente

Proposition 2.8. Soit $f \in D^1(I)$ convexe et $a \in I$
Alors $\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$

Cette proposition permet de retrouver des inégalités classiques :

$*$ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$

$*$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x + 1$

$*$ $\forall h \in]-1, +\infty[, \ln(1+h) \leq h$

La concavité sur $[0, \pi]$ de sin donne :
$\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \leq x$ (on a même $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$)
La position par rapport aux sécantes montre aussi
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$